

Constructing an $m \times (n+1)$ trianguloid from an $m \times n$ trianguloid

北海道大学 大学院理学院 数学専攻
小村寅之介 (Toranosuke OMURA) *

概要

単体の直積 $\Delta^m \times \Delta^n$ の三角形分割には過去数十年間において様々な研究が行われてきた. Pavel Galashin, Gleb Nenashev, Alexander Postnikov 等は trianguloid というものを定義し, $\Delta^m \times \Delta^n$ の三角形分割全体の集合と $(m+1) \times (n+1)$ 型の trianguloid 全体の集合の間に自然な全単射があることを示した. 本発表では $m \times n$ 型の trianguloid から $m \times (n+1)$ 型の trianguloid を構成する方法について述べる.

1 導入

まず三角形分割について簡単な説明をする. $A \subset \mathbb{R}^k$ を有限集合とする. $Q = \text{Conv} A$ と定める. このとき Q を convex polytope と呼ぶ. 単体的複体 τ が (Q, A) の三角形分割であるとは次の条件がすべて成り立つことである.

- $Q = \bigcup_{\Delta \in \tau} \Delta$.
- 各 $\Delta \in \tau$ に対して Δ の頂点全体の集合は A の部分集合になる.

文脈から A が明らかなきときには τ が Q の三角形分割であるということもある. 以後, τ の元としては最大次元の単体のみを考える (つまり Q と同じ次元の単体のみを考える).

三角形分割の問題として自然に考えられるものとしては P, Q が convex polytope のとき, その直積 $P \times Q$ の三角形分割がどうなるかという問題がある. ここではその最も単純な場合である, 単体の積 $\Delta^m \times \Delta^n$ の三角形分割について扱う. この場合においても m, n が大きい場合にはわかっていないことも多くある.

本発表では, Pavel Galashin, Gleb Nenashev, Alexander Postnikov 等が導入した trianguloid についてまず説明し, $\Delta^m \times \Delta^n$ の三角形分割との関連性について述べる. 次に主結果として $m \times (n+1)$ 型の trianguloid を $m \times n$ 型の trianguloid から構成する方法について述べる.

* E-mail: omura.toranosuke.m5@elms.hokudai.ac.jp

2 準備

$[m] = \{1, \dots, m\}$, $[\bar{n}] = \{\bar{1}, \dots, \bar{n}\}$ を互いに共通部分を持たない 2 つの集合とする. $\{e_1, \dots, e_m\}$ を $\mathbb{R}^m$ の標準基底, $\{e_{\bar{1}}, \dots, e_{\bar{n}}\}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする. $\Delta^{m-1} = \text{Conv}\{e_i \mid i \in [m]\}$, $\Delta^{n-1} = \text{Conv}\{e_{\bar{j}} \mid \bar{j} \in [\bar{n}]\}$ とすると $\Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1} = \text{Conv}\{e_i + e_{\bar{j}} \mid i \in [m], \bar{j} \in [\bar{n}]\} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ となる. [1]

2.1 trianguloid の定義

trianguloid は [1] において最初に導入された. 本来は $\Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1}$ に限らない convex polytope に対して定義されているが, ここでは $\Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1}$ の場合に限定した場合の定義について説明する. $P_{m,n}, P_{m,n}^-$ をそれぞれ,

$$P_{m,n} = n\Delta^{m-1} := \{(a_1, \dots, a_m) \mid \text{任意の } i \in [m] \text{ について } a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ かつ, } \sum_{i=1}^m a_i = n\},$$

$$P_{m,n}^- = (n-1)\Delta^{m-1} := \{(a_1, \dots, a_m) \mid \text{任意の } i \in [m] \text{ について } a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ かつ, } \sum_{i=1}^m a_i = n-1\}$$

とする. 有向グラフ $\Gamma_{m,n}$ を次の様に定義する. 頂点集合 $V(\Gamma_{m,n})$ を $V(\Gamma_{m,n}) = (P_{m,n}^- \cap \mathbb{Z}^m) \cup (P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m)$ とする. 辺集合 $E(\Gamma_{m,n})$ を $E(\Gamma_{m,n}) = \{(b \rightarrow b + e_i) \mid b \in P_{m,n}^- \cap \mathbb{Z}^m, i \in [m]\}$ とする. 今後 $(b \rightarrow a) \in E(\Gamma_{m,n}), a = b + e_i$ のとき, $(b \rightarrow a)$ のことを $(b \xrightarrow{i} \bullet)$ または $(\bullet \xrightarrow{i} a)$ と書くことにする.

定義 2.1. $m \times n$ 型の pre-trianguloid とは (T1) から (T3) を満たす写像 $\mathbb{T} : E(\Gamma_{m,n}) \rightarrow 2^{[\bar{n}]}$ である. (T1) から (T4) を満たすものを $m \times n$ 型の trianguloid と呼ぶ.

(T1) 任意の辺 $(\bullet \xrightarrow{i} a) \in E(\Gamma_{m,n})$ に対して, $|\mathbb{T}(\bullet \xrightarrow{i} a)| = a_i$.

(T2) 任意の $a \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ と任意の $\bar{j} \in [\bar{n}]$ に対して, ある $i \in [m]$ が存在して $\bar{j} \in \mathbb{T}(\bullet \xrightarrow{i} a)$.

(T3) $a \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ と $i, j \in [m]$ に対して, $a' := a + e_i - e_j \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ ならば $\mathbb{T}(\bullet \xrightarrow{i} a) \subset \mathbb{T}(\bullet \xrightarrow{i} a')$.

(T4) $c \in (n-2)\Delta^{m-1} \cap \mathbb{Z}^m$ と互いに異なる 3 つの $i, j, k \in [m]$ に対して, $\mathbb{T}(c + e_i \xrightarrow{j} \bullet) \neq \mathbb{T}(c + e_k \xrightarrow{j} \bullet)$ ならば, $\mathbb{T}(c + e_j \xrightarrow{i} \bullet) = \mathbb{T}(c + e_k \xrightarrow{i} \bullet)$ かつ $\mathbb{T}(c + e_i \xrightarrow{k} \bullet) = \mathbb{T}(c + e_j \xrightarrow{k} \bullet)$.

(T1) と (T2) から以下のことが分かる.

命題 2.2. [1, Remark 3.2.] $m \times n$ 型の trianguloid $\mathbb{T}$ と $a \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ に対して $[\bar{n}] = \mathbb{T}(\bullet \xrightarrow{1} a) \sqcup \mathbb{T}(\bullet \xrightarrow{2} a) \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}(\bullet \xrightarrow{m} a)$.

また (T3) より次のことが分かる.

命題 2.3. $a \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ と $i, j \in [m]$ と $s \in \mathbb{N}$ に対して $a' := a + se_i - se_j \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ ならば

$$\mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}) \subset \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}').$$

次のことが知られている.

定理 2.4. [1, Section7] $\mathbb{T}$ を $m \times n$ 型の trianguloid とする. 任意の $\mathbf{b} \in P_{m,n}^-$ に対して, $\Delta_{\mathbf{b}} := \text{Conv}\{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{\bar{j}} \mid \bar{j} \in \mathbb{T}(\mathbf{b} \rightarrow \bullet)\}$ とする. このとき $\Delta_{\mathbf{b}}$ は $m + n - 2$ 次元 ($= \Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1}$ の次元) で,

$$\tau_{\mathbb{T}} := \{\Delta_{\mathbf{b}} \mid \mathbf{b} \in P_{m,n}^- \cap \mathbb{Z}^m\}$$

は $\Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1}$ の三角形分割である.

定理 2.5. [1, Theorem 3.6, Lemma 5.3] $m \times n$ 型の trianguloid 全体の集合と $\Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1}$ の三角形分割全体の集合は, 写像 $\mathbb{T} \rightarrow \tau_{\mathbb{T}}$ によって一対一対応する.

2.2 $3 \times n$ の trianguloid の図示

ここでは $3 \times n$ 型の trianguloid の図的な表現について説明する. $P_{3,n}$ と $P_{3,n}^-$ の次元は 2 で互いに平行なので, 垂直方向の違いを無視することで一つの平面上に $P_{3,n} \cap \mathbb{Z}^3$ と $P_{3,n}^- \cap \mathbb{Z}^3$ をプロットできる. 例えば $n = 3$ のとき以下の様になる.

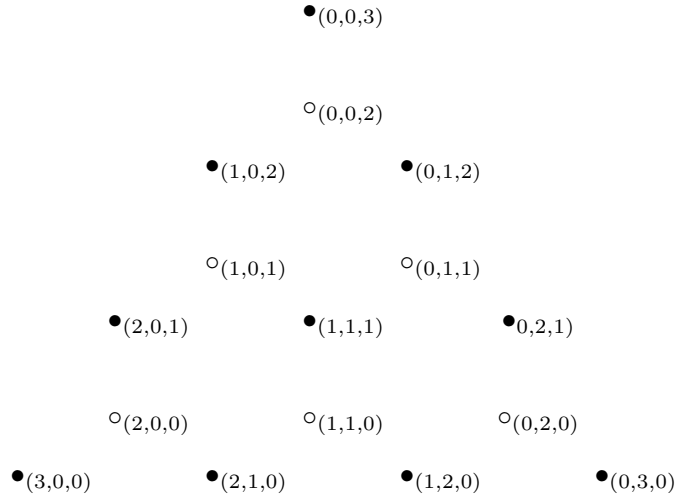


図1 $P_{3,3} \cap \mathbb{Z}^3$ の点と $P_{3,3}^- \cap \mathbb{Z}^3$ の点のプロット. $P_{3,3} \cap \mathbb{Z}^3$ の点は黒丸, $P_{3,3}^- \cap \mathbb{Z}^3$ の点は白丸で表現している.

$(\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a}) \in E(\Gamma_{3,n})$ となる $\mathbf{b} \in P_{3,n}^- \cap \mathbb{Z}^3$, $\mathbf{a} \in P_{3,n} \cap \mathbb{Z}^3$ に対して $\bar{j} \in \mathbb{T}(\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a})$ ならば $\bar{j}$ とラベル付けされた矢印を上図に書き込むことにする. そうすることで $\mathbb{T}$ の情報を視覚的に把握しやすくなる.

例 2.6. $n = 3$ とする. $\mathbb{T} : E(\Gamma_{3,3}) \rightarrow 2^{[3]}$ を次の様に定義する.

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}((2, 0, 0)^t \xrightarrow{1} \bullet) &= \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}, & \mathbb{T}((2, 0, 0)^t \xrightarrow{2} \bullet) &= \{\bar{1}\}, & \mathbb{T}((2, 0, 0)^t \xrightarrow{3} \bullet) &= \{\bar{1}\}, \\
\mathbb{T}((1, 1, 0)^t \xrightarrow{1} \bullet) &= \{\bar{2}, \bar{3}\}, & \mathbb{T}((1, 1, 0)^t \xrightarrow{2} \bullet) &= \{\bar{1}, \bar{2}\}, & \mathbb{T}((1, 1, 0)^t \xrightarrow{3} \bullet) &= \{\bar{2}\}, \\
\mathbb{T}((0, 2, 0)^t \xrightarrow{1} \bullet) &= \{\bar{3}\}, & \mathbb{T}((0, 2, 0)^t \xrightarrow{2} \bullet) &= \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}, & \mathbb{T}((0, 2, 0)^t \xrightarrow{3} \bullet) &= \{\bar{3}\}, \\
\mathbb{T}((1, 0, 1)^t \xrightarrow{1} \bullet) &= \{\bar{2}, \bar{3}\}, & \mathbb{T}((1, 0, 1)^t \xrightarrow{2} \bullet) &= \{\bar{1}\}, & \mathbb{T}((1, 0, 1)^t \xrightarrow{3} \bullet) &= \{\bar{1}, \bar{2}\}, \\
\mathbb{T}((0, 1, 1)^t \xrightarrow{1} \bullet) &= \{\bar{3}\}, & \mathbb{T}((0, 1, 1)^t \xrightarrow{2} \bullet) &= \{\bar{1}, \bar{2}\}, & \mathbb{T}((0, 1, 1)^t \xrightarrow{3} \bullet) &= \{\bar{2}, \bar{3}\}, \\
\mathbb{T}((0, 0, 2)^t \xrightarrow{1} \bullet) &= \{\bar{3}\}, & \mathbb{T}((0, 0, 2)^t \xrightarrow{2} \bullet) &= \{\bar{1}\}, & \mathbb{T}((0, 0, 2)^t \xrightarrow{3} \bullet) &= \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}.
\end{aligned}$$

実際に $\mathbb{T}$ は trianguloid になっている. このとき $\mathbb{T}$ は以下の図のようになる.

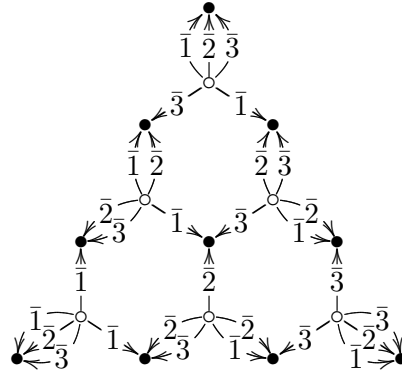


図 2 $\mathbb{T}$ の図

3 主結果

私は $m \times n$ 型の trianguloid から $m \times (n + 1)$ 型の trianguloid を構成する方法を得た.

3.1 $\mathbb{T}_s$ の定義

主定理を述べるために記号の定義をする. $\mathbb{T}$ を $m \times n$ 型の trianguloid とする. 整数 s を $1 \leq s \leq n + 1$ の範囲で 1 つとって固定する. 写像 $\mathbb{T}_s$ を次のように定義する. 写像 $i : P_{m,n+1} \cap \mathbb{Z}^m \rightarrow [m]$ を

$$i(\mathbf{a}) = \begin{cases} \max\{i \mid a_i > 0\} & (\sum_{i=3}^m a_i \neq 0), \\ 1 & (\sum_{i=3}^m a_i = 0 \text{ and } a_1 \geq s), \\ 2 & (\sum_{i=3}^m a_i = 0 \text{ and } a_1 < s), \end{cases}$$

とする.

注 3.1. $i(\mathbf{a})$ の定義より, $a_{i(\mathbf{a})} \geq 1$ である. 従って $\mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})} \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ である.

各 $(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}) \in E(\Gamma_{m,n+1})$ に対して, $\mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a})$ を

$$\mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}) = \begin{cases} \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) \cup \{\overline{n+1}\} & (i = i(\mathbf{a}) \text{ and } (\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) \in E(\Gamma_{m,n})), \\ \{\overline{n+1}\} & (i = i(\mathbf{a}) \text{ and } (\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) \notin E(\Gamma_{m,n})), \\ \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) & (i \neq i(\mathbf{a})), \end{cases}$$

と定義する.

3.2 主定理

定理 3.2. $1 \leq s \leq n+1$ の範囲の整数 s に対して, $\mathbb{T}_s$ は $m \times (n+1)$ 型の trianguloid になる.

例 3.3. $\mathbb{T}$ を例 2.6 の 3×3 型の trianguloid とする.

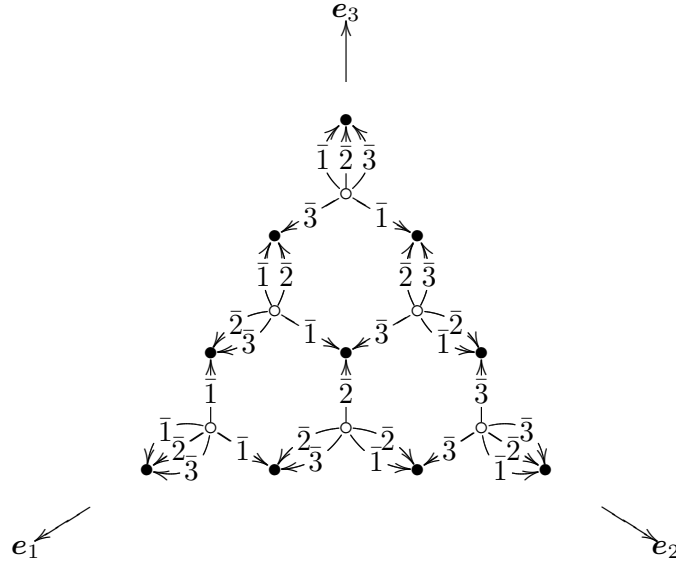


図 3 $\mathbb{T}$ の図

$s = 2$ とする. この時, $i(\mathbf{a})$ は以下のようなになる.

$$i(\mathbf{a}) = \begin{cases} 3 & (a_3 > 0), \\ 1 & (a_3 = 0 \text{ and } a_1 \geq 2), \\ 2 & (a_3 = 0 \text{ and } a_1 < 2). \end{cases}$$

従って $\mathbb{T}_2$ は次のような 3×4 型の trianguloid になる.

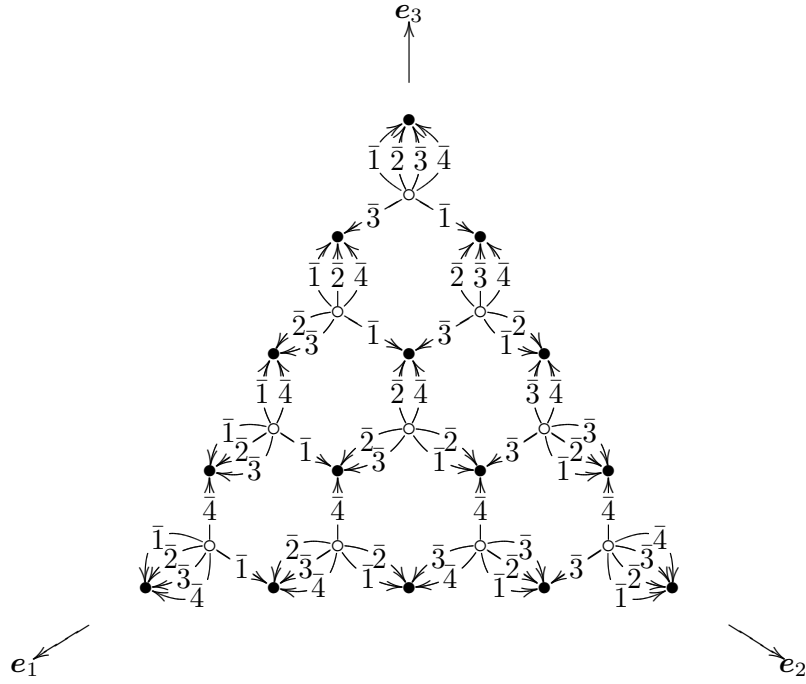


図4 T_2 の図

4 主定理の証明

ここでは T_s が (T3) を満たすことについてのみ証明する. (T1), (T2), (T4) についての証明は省略する.

$\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in P_{m,n+1} \cap \mathbb{Z}^m$ かつ $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ ($i \neq j$) かつ $(\circ \rightarrow_i \mathbf{a}), (\circ \rightarrow_i \mathbf{a}') \in E(\Gamma_{m,n+1})$ と仮定する. まず次の補題を示す.

補題 4.1. $i = i(\mathbf{a})$ ならば $i = i(\mathbf{a}')$.

補題 4.2. $i(\mathbf{a}) \neq i(\mathbf{a}')$ ならば, $i \neq i(\mathbf{a})$ かつ $j = i(\mathbf{a})$.

補題 4.1 の証明. $i = i(\mathbf{a})$ とする.

$i(\mathbf{a}) \geq 3$ と仮定する. $i(\mathbf{a})$ の定義より, $u > i(\mathbf{a})$ であるような u に対して, $a_u = 0$ である. $i(\mathbf{a}) = i \neq j$ かつ $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \in P_{m,n+1} \cap \mathbb{Z}^m$ なので, $j < i(\mathbf{a})$ である. よって次を得る.

$$a'_k = \begin{cases} 0 & (k > i(\mathbf{a})), \\ a_{i(\mathbf{a})} + 1 & (k = i(\mathbf{a})). \end{cases}$$

$i(\mathbf{a}) \geq 3$ だから, $i(\mathbf{a}') = i(\mathbf{a})$ である.

$i(\mathbf{a}) = 1$ と仮定する. $i(\mathbf{a})$ の定義より, $a_1 \geq s$ である. $i = i(\mathbf{a}) = 1$ かつ $i \neq j$ だから, $a'_1 = a_1 + 1 > s$ である. よって $i(\mathbf{a}') = i(\mathbf{a}) = 1$ である.

$i(\mathbf{a}) = 2$ と仮定する. $i(\mathbf{a})$ の定義より, $a_1 < s$ である. $i = i(\mathbf{a}) = 2$ かつ $i \neq j$ だから, $a'_1 < a_1 < s$ である. よって $i(\mathbf{a}') = i(\mathbf{a}) = 2$ である.

□

補題 4.2 の証明. $i(\mathbf{a}) \neq i(\mathbf{a}')$ と仮定する. 最初に $i \neq i(\mathbf{a})$ を示す. $i = i(\mathbf{a})$ と仮定する. 補題 4.1 より, $i(\mathbf{a}) = i = i(\mathbf{a}')$ となる. これは仮定 $i(\mathbf{a}) \neq i(\mathbf{a}')$ に反す. . 背理法により $i \neq i(\mathbf{a})$ が成り立つ.

次に $j = i(\mathbf{a})$ を示す. $\mathbf{a} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \in P_{m,n+1} \cap \mathbb{Z}^m$ かつ $i \neq j$ だから, $a_j \geq 1$ である.

$\sum_{i=3}^m a_i \neq 0$ と仮定する. $i(\mathbf{a})$ の定義と仮定 $\sum_{i=3}^m a_i \neq 0$ より, $i(\mathbf{a}) \geq 3$ となる. $i(\mathbf{a})$ の定義より, $u > i(\mathbf{a})$ であるような u に対して $a_u = 0$.

仮定 $(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}) \in E(\Gamma_{m,n+1})$ より, $a_i \geq 1$ となる. よって $i \leq i(\mathbf{a})$ である. $a_j \geq 1$ より, $j \leq i(\mathbf{a})$ である. もし $j < i(\mathbf{a})$ ならば, このとき

$$a'_u = \begin{cases} 0 & (u > i(\mathbf{a})) \quad \because i \leq i(\mathbf{a}) \\ a_{i(\mathbf{a})} & (u = i(\mathbf{a})) \quad \because i \neq i(\mathbf{a}) \text{ かつ } j < i(\mathbf{a}), \end{cases}$$

となる. $i(\mathbf{a}) \geq 3$ より, $i(\mathbf{a}') = i(\mathbf{a})$ となる. これは仮定 $i(\mathbf{a}) \neq i(\mathbf{a}')$ に矛盾する. 背理法により $j = i(\mathbf{a})$ が成り立つ.

$\sum_{i=3}^m a_i = 0$ と仮定する. $i \neq j$ かつ $(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}), (\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}') \in E(\Gamma_{m,n+1})$ かつ $\sum_{i=3}^m a_i = 0$ より, $(i, j) = (1, 2)$ または $(i, j) = (2, 1)$ となる. $i(\mathbf{a})$ の定義より, $i(\mathbf{a}) = 1$ または $i(\mathbf{a}) = 2$ である. $i \neq i(\mathbf{a})$ より, $j = i(\mathbf{a})$ である. □

以上の補題を使って $\mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}) \subset \mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}')$ を示す.

4.1 $i(\mathbf{a}) = i(\mathbf{a}')$ の場合.

まず $\mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) \subset \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} (\mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)$ を示す. $\mathbb{T}$ は (T3) を満たしているので, $\mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}, \mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ を示せば十分である. 注 3.1 より, $\mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})} \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ となる. 次に $\mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ を示す.

■ $j \neq i(\mathbf{a})$ の場合. 仮定 $\mathbf{a} \in P_{m,n+1} \cap \mathbb{Z}^m$ より, $a_j \geq 1$ かつ $a_{i(\mathbf{a})} \geq 1$ を示せば十分である. 仮定 $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \in P_{m,n+1} \cap \mathbb{Z}^m$ より, $a_j \geq 1$ である. 注 3.1 より, $a_{i(\mathbf{a})} \geq 1$ となる. 従って $\mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ が成り立つ.

■ $j = i(\mathbf{a})$ の場合. この場合 $\mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j = \mathbf{a} + \mathbf{e}_i - 2\mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}$. が成り立つ. 仮定 $i \neq j$ より, $i \neq i(\mathbf{a})$ となる. 従って $a_{i(\mathbf{a})} \geq 2$ を示せば十分である. 仮定 $i(\mathbf{a}) = i(\mathbf{a}')$ と注 3.1 より, $a'_{i(\mathbf{a})} \geq 1$ となる. 従って

$$1 \leq a'_{i(\mathbf{a})} = a_{i(\mathbf{a})} - 1, \quad \because \mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \text{ かつ } i \neq j = i(\mathbf{a}),$$

となり, $a_{i(\mathbf{a})} \geq 2$ となることがわかる. よって $\mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \in n\Delta^{m-1} \cap \mathbb{Z}^m$ が成り立つ.

以上より, $\mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) \subset \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} (\mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)$ となることがわかった. これを使って $\mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}) \subset \mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}')$ を示す.

■ $i = i(\mathbf{a}) = i(\mathbf{a}')$ の場合. $\mathbb{T}_s$ の定義より,

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}) &= \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) \cup \{\overline{n+1}\}, \\ \mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}') &= \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}' - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a}')}) \cup \{\overline{n+1}\} = \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) \cup \{\overline{n+1}\},\end{aligned}$$

である. $\mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) \subset \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} (\mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)$ だから, $\mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}) \subset \mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}')$ が成り立つ.

■ $i \neq i(\mathbf{a}) = i(\mathbf{a}')$ の場合. $\mathbb{T}_s$ の定義より,

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}) &= \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}), \\ \mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}') &= \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}' - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a}')}) = \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}).\end{aligned}$$

である. $\mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) \subset \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} (\mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)$ だから, $\mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}) \subset \mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}')$ が成り立つ.

4.2 $i(\mathbf{a}) \neq i(\mathbf{a}')$ の場合.

補題 4.2 より, $i \neq i(\mathbf{a})$ かつ $j = i(\mathbf{a})$ となる. よって

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}) &= \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a})}) = \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_j), \\ \mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}') &= \begin{cases} \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}' - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a}')}) \cup \{\overline{n+1}\} = \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a}')}) \cup \{\overline{n+1}\} & (i = i(\mathbf{a}')), \\ \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}' - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a}')}) = \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a}')}) & (i \neq i(\mathbf{a}')), \end{cases}\end{aligned}$$

となる.

■ $i = i(\mathbf{a}')$ の場合. この場合, $\mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a}')}) = \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_j)$ となる. 従って $\mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}) \subset \mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}')$ である.

■ $i \neq i(\mathbf{a}')$ の場合. $\mathbb{T}$ は (T3) を満たすので, $\mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a} - \mathbf{e}_j) \subset \mathbb{T}(\circ \xrightarrow{i} (\mathbf{a} - \mathbf{e}_j) + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i(\mathbf{a}')})$ が成り立つ. よって $\mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}) \subset \mathbb{T}_s(\circ \xrightarrow{i} \mathbf{a}')$ が成り立つ.

参考文献

- [1] Pavel Galashin, Gleb Nenashev, and Alexander Postnikov “*Trianguloid and triangulations of root polytopes*”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A, Volume 201, 2024*.
<https://doi.org/10.1016/j.jcta.2023.105802>
- [2] Alexander Postnikov “*Permutohedra, associahedra, and beyond*”, *International Mathematics Research Notices, Volume 2009, Issue 6, Pages 1026–1106, 2009*.
- [3] Israel Moiseevich Gelfand, Mikhail Kapranov, Andrei Zelevinsky “*Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*”, 2008